



### Spoločný úvod k matematickým úlohám

V tomto kole seminára sa matematické úlohy zaoberajú prirodzenými a celými číslami a ich vlastnosťami. Doporučenou literatúrou k týmto úlohám je knižka:

Jiří Sedláček: **Co víme o přirozených číslech**, Praha 1961

2. diel edície Škola mladých matematikov (ŠMM)

Všetky knihy z edície ŠMM nájdete na stránke: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423>

6 bodov



**1A.** Dané je dvojciferné číslo, ktorého ciferný súčet je 8. Keď prehodíme poradie cifier daného čísla, tak dostaneme číslo o 36 menšie. Aké je dané číslo?

6 bodov



**1B.** Dané je trojciferné číslo, ktorého ciferný súčet je 14. Ak jeho cifry zapíšeme v opačnom poradí, tak dostaneme číslo, ktoré je o 99 väčšie než pôvodné číslo. A ak prehodíme poradie jeho prvých dvoch (zľava) cifier, tak dostaneme číslo, ktoré je o 360 väčšie než pôvodné číslo. Aké je dané číslo?

7 bodov



**2A.** Dokážte, že číslo  $2^{180} + 36$  je deliteľné číslom 37.

7 bodov



**2B.** Dokážte, že číslo  $3^{96} + 14$  je deliteľné číslom 79.



8 bodov



**3A.** Daná je rovnica  $2x + 8y + 14z = 2027$ , kde  $x, y, z$  môžu byť len celé čísla. Zistite, či existuje celočíselné riešenie tejto rovnice a ak áno, nájdite ho.

8 bodov



**3B.** Dané sú dve prirodzené čísla  $a, b$ . Označme si  $\text{nsd}(a, b)$  **najväčší spoločný deliteľ** čísel  $a, b$  a  $\text{nsn}(a, b)$  **najmenší spoločný násobok** čísel  $a, b$ . Dokážte, že platí

$$a \cdot b = \text{nsd}(a, b) \cdot \text{nsn}(a, b).$$

14 bodov



**4A.** Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo  $n$  platí  $7 \mid (n^7 - n)$ . Zápis  $a \mid b$  pre celé čísla  $a, b$  znamená „číslo  $a$  delí číslo  $b$  bez zvyšku“, alebo inak zapísané  $b = k \cdot a$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ .

14 bodov



**4B.** Nech  $p$  je ľubovoľné prvočíslo väčšie než 2 a  $n \in \mathbb{N}$  je ľubovoľné prirodzené číslo. Dokážte, že potom platí  $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ . Uvedený zápis znamená, že číslo  $n^{\frac{p-1}{2}}$  má po delení číslom  $p$  zvyšok 1, alebo  $-1$ , alebo inak zapísané  $n^{\frac{p-1}{2}} = k \cdot p \pm 1$  pre nejaké  $k \in \mathbb{Z}$ .



9 bodov



**5A. Poškodený kalendár 1.** Vstupom je dátum vo formáte DD.MM.YYYY (vždy 10 znakov), ktorý môže obsahovať len jeden znak ? namiesto číslice, buď v dni (DD), alebo v mesiaci (MM). Rok je pevne daný a neobsahuje znak ?. Roky môžu byť v rozsahu od 1600 do 9999. Tvojou úlohou je zistiť, koľko platných dátumov môže takto zadaný dátum predstavovať. Treba pritom zohľadniť počet dní v mesiaci (napr. február má 28/29 dní podľa toho, či sa jedná o priestupný rok, niektoré mesiace majú 30 dní, iné 31 dní).

Program môže byť napísaný v Pythone (preferovaný jazyk), alebo v C (nie C++).

Príklady:

- Vstup: 1?.02.2024 → Výstup: 10
- Vstup: 31.0?.2021 → Výstup: 5

9 bodov



**5B. Poškodený kalendár 2.** Vstupom je dátum vo formáte DD.MM.YYYY (vždy 10 znakov), ktorý môže obsahovať ľubovoľný počet znakov ? namiesto číslice. Znaky ? sa môžu nachádzať v dni (DD), v mesiaci (MM) aj v roku (YYYY). Rok môže byť v rozsahu 1600–9999. Tvojou úlohou je zistiť, koľko platných dátumov môže takto zadaný dátum predstavovať. Treba pritom zohľadniť počet dní v mesiaci (napr. február má 28/29 dní podľa toho, či sa jedná o priestupný rok, niektoré mesiace majú 30 dní, iné 31 dní).

Program môže byť napísaný v Pythone (preferovaný jazyk), alebo v C (nie C++).

Príklady:

- Vstup: 29.02.???? → Výstup: 2037
- Vstup: ???.???.2025 → Výstup: 365 (rok 2025 nebol priestupný)
- Vstup: ???.???.???? → Výstup: 3 068 037



16 bodov

**6A.** Rozlúštite nasledujúci text (14 bodov)

PJLOL RAONY EREUA HCNVK UTLNI MTASL JVAAI KULAD ULRIY TOVJO LSENA OBVVA  
SUIAV DALYK HTKDU OOLSV OSSDJ XIPLD INVIE RPASS SPSAB ZBEAT SPODA LYAPR  
LSOKE AIOEN SKBVR LRJZE VEAAY MTSOE VSOAV TOVDH SIOIT HSGIC VDRAE MEOKH  
EBLAH GLOHE POMAD APEOT ADNEG TTRHM LOBNO VRYLC MKVVL IOSSA IDAEO RKAAT  
REONN MIOKU TCPJR NJLEB NANZO OSOMN OUNDO ZRBOV VZATM KZOAR RAEAO IADAA  
ZSEMO KCKOC JESEV UENIR AZLHI KDPYU DEAC VCYZD ANKYL SVLYE CATVE TAREY  
AAALS AISOM RUIEO JSVST EVELA EXAMS BOHTP EMSIH YDDKL GMZOO LITOC SSZNC  
KAEMZ ALEYX IUMEH A0000 NDITC NOSSL NYDKN OSMOA ALVHS IIOAZ IAALR ATLEE  
LJERD TATRL VUNES TVTOM DPUNP RUOIT ORVMA N

Jedná sa o slovensky písaný text bez medzier a bez diakritických a interpunkčných znamienok. Text je zašifrovaný úplnou tabuľkovou transpozíciou. Šírka tabuľky je 12. Výsledný, zašifrovaný, text je rozdelený do 5-znakových skupín.

Za správne určenie knihy, z ktorej text pochádza, sú ešte bonusové (2 body).

16 bodov

**6B.** Rozlúštite nasledujúci text a zistite odkiaľ pochádza:

SIYID SSANK PIMEN YAAAI IZOLE TTRIB UADLO RAAOV HOPIV GYOKS  
ZCDLA OAOMN ILOKK ITSEK VYZIA KSAUN DTMAA LNMTR AIOVD YILOZ  
MNISL ATARA ATAOT LPSTA YALON HUOKI ASNOR NNAIO JZTEE LYJAA  
AAUO ACIJH OISVA RAALZ MDDZA ASDIE LUBAK MSVSS ABAJK ZDSLH  
MEANO KRNEI TNAEO OACLH IETLI JIYAU ITRAZ ANZAC DOORA ALCCS  
CIAJU OEKAI MBYIH CIMII AIAOV ATERR ERZEO OIAVN IIHJA ANHMA  
TVMYD RCUSO SLTLN BILET OEIPE LBNSM ALTSA ANONU JRLAO UAUUI  
HTVSH BZVUZ SZANZ ODATI SKNHH IIKN

Jedná sa o slovensky písaný text bez medzier a bez diakritických a interpunkčných znamienok. Text je zašifrovaný neúplnou tabuľkovou transpozíciou. Šírka tabuľky je 9. Výsledný, zašifrovaný, text je rozdelený do 5-znakových skupín.