



Spoločný úvod k matematickým úlohám

Dirichletov princíp, niekedy označovaný aj ako „*holubníkový princíp*“, alebo „*zásuvkový princíp*“, je dôkazová metóda využívajúca nasledujúce tvrdenie

Ak rozdelíme $(n + 1)$ objektov do n skupín, tak aspoň v jednej skupine sa musia nachádzať aspoň 2 objekty.

Dirichletov princíp sa využíva na dokazovanie tvrdení v rôznych oblastiach matematiky, napr. v teórii množín, teórii čísel, kombinatorike, geometrii atď. Viac sa o ňom môžete dočítať v knižke:

Lev Bukovský, Igor Kluvánek: **Dirichletov princíp**, Praha 1969

25. diel edície Škola mladých matematikov (ŠMM)

Všetky knihy z edície ŠMM nájdete na stránke: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423>

4 body



1A. Dokážte, že ak je daných 2026 prirodzených čísel, tak medzi nimi existujú dve, ktorých rozdiel je deliteľný číslom 2025.

4 body



1B. Dokážte, že ak je daných $n + 2$ po sebe idúcich prirodzených čísel, tak medzi existujú dve, ktorých súčet je deliteľný číslom $2n + 1$.

7 bodov



2A. Ku každému prirodzenému číslu n existuje jeho celočíselný násobok v tvare

$$77 \dots 700 \dots 0$$

7 bodov



2B. Je daných 2027 prirodzených čísel. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať niekoľko čísel tak, že ich súčet je deliteľný číslom 2026.



9 bodov



3A. V kocke o hrane 15 cm leží 2198 bodov. Dokážte, že vzdialenosť niektorých dvoch z týchto bodov je menšia než 2.

9 bodov



3B. Dokážte, že každé prirodzené číslo, ktorého dekadický zápis končí niektorou z cifier $\{1, 3, 7, 9\}$ má celočíselný násobok, ktorého dekadický zápis pozostáva zo samých trojok.

10 bodov



4A. Šachového turnaja sa zúčastňuje 6 hráčov. Dokážte, že počas celého trvania turnaja vieme spomedzi nich vždy vybrať trojicu hráčov tak, že buď v tejto trojici už každý s každým hral, alebo ešte žiaden so žiadnym nehral.

10 bodov



4B. Postupnosť $2, 0, 2, 7, 1, 0, 0, 8, 9, 7, 4, 8, 8, \dots$ je konštruovaná nasledovne: každé ďalšie číslo je poslednou cifrou súčtu predchádzajúcich štyroch čísel. Ak si túto postupnosť zapíšeme ako $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tak jej prvé členy sú $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 7$ a jej ďalšie členy sú dané rekurentným vzťahom $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}) \bmod 10$.

Vysvetlenie: mod znamená „modulo“ a je to zvyšok po delení. Takže $a \bmod b = c$ znamená, že číslo a má po delení číslom b zvyšok c .

- Zistite, či sa štvorica $2, 0, 2, 7$ v danej postupnosti zopakuje. Svoje tvrdenie musíte dokázať. [8 bodov]
- Zistite, či sa v danej postupnosti vyskytne štvorica $4, 8, 7, 3$. Svoje tvrdenie musíte dokázať. [2 body]



16 bodov



5A. Pátranie po poklade (Light): Pirátska posádka sa práve vylodila na opustenom ostrove, aby našla bájny poklad. Ostrov sa dá zjednodušene predstaviť ako mriežka (graf), kde každá bunka mriežky predstavuje určitý typ terénu. Existujú 2 typy terénu:

- Piesok: Cesta, ktorá je priechodná a dá sa cez ňu voľne pohybovať.
- Hory: Úplne nepriechodné.

Piráti môžu spraviť len jeden krok naraz, a to buď horizontálne, alebo vertikálne (diagonálny pohyb nie je možný). Jeden krok trvá 1 minútu.

Úloha: Tvojou úlohou je napísať v Pythone program, ktorý nájde najrýchlejšiu cestu z východiskového bodu (pirátskej lode) k pokladu.

Vstupné údaje: Vstupné údaje budú zadané v súbore `mapa.txt`. Prvý riadok bude obsahovať rozmery mapy R (počet riadkov) a C (počet stĺpcov), oddelené medzerou. Nasleduje R riadkov, pričom každý z nich má C znakov, ktoré predstavujú mapu ostrova.

H – Hory

P – Piesok

L – Pirátska loď (východiskový bod)

X – Poklad (cieľ)

Príklad súboru `mapa.txt`:

```
5 5
PLPHP
PHHPP
PPPHH
PHPPH
PPHXH
```

Výstupné údaje: Výstupom bude jedno číslo, napríklad 8, ktoré predstavuje minimálny čas, za ktorý je možné dosiahnuť poklad. Ak nie je možné dostať sa k pokladu, výstupom bude číslo -1. Výstup, t. j. najrýchlejšia cesta, sa uloží do súboru `cesta.txt`.



16 bodov



5B. Pátranie po poklade (Hard): Pirátska posádka sa práve vylodila na opustenom ostrove, aby našla bájny poklad. Ostrov sa dá zjednodušene predstaviť ako mriežka (graf), kde každá bunka mriežky predstavuje určitý typ terénu. Existujú 3 typy terénu:

- Piesok: Cesta, ktorá je priechodná a dá sa cez ňu voľne pohybovať.
- Džungľa: Priechodná, ale pohyb cez ňu je spomalený.
- Hory: Úplne nepriechodné.

Piráti môžu spraviť len jeden krok naraz, a to buď horizontálne, alebo vertikálne (diagonálny pohyb nie je možný). Jeden krok cez piesok trvá 1 minútu. Jeden krok cez džungľu trvá 2 minúty.

Úloha: Tvojou úlohou je napísať v Pythone program, ktorý nájde najrýchlejšiu cestu z východiskového bodu (pirátskej lode) k pokladu.

Vstupné údaje: Vstupné údaje budú zadané v súbore `mapa.txt`. Prvý riadok bude obsahovať rozmery mapy R (počet riadkov) a C (počet stĺpcov), oddelené medzerou. Nasleduje R riadkov, pričom každý z nich má C znakov, ktoré predstavujú mapu ostrova.

D – Džungľa

P – Piesok

L – Pirátska loď

H – Hory

X – Poklad (cieľ)

(východiskový bod)

Príklad súboru `mapa.txt`:

```
5 5
PLPHP
PHDDP
PPPHH
PDPDH
PPDXH
```

Výstupné údaje: Výstupom bude jedno číslo, napríklad 8, ktoré predstavuje minimálny čas, za ktorý je možné dosiahnuť poklad. Ak nie je možné dostať sa k pokladu, výstupom bude číslo -1. Výstup, t. j. najrýchlejšia cesta, sa uloží do súboru `cesta.txt`.



14 bodov

6A. Rozlúštite nasledujúci text a zistite odkiaľ pochádza:

LXP YUVHPAIXQ KIFQAIFSY UGA IAJY LXP YHSYLYTAIXQ CA IF JFIYWH IF CATIV QWSV
YT KAQA QF HATAQTAHWFP UFP PWHWB DGFIZYN TYQXHASIACHWA KPGYHZYPFIWA AHPA
IWZTX IAUGANWATSW IABJXLW PV IWB CA HWBA UGFNTF KA NHAPZY LYSY PWAU UGATNWTFIG
BSVLWIF YT QSFTYHPW YUFIYNFSF CATIF QXHWSAIZF NGJIVP HPFPYBIYHP FZY HPFNZV
TY GVSAPX KWNYPF LXP UYNFKYNFIXQ KF HPFPYBIAJY BSYNAZF F K PYJY NXBJYTWP
BFZFP FK KFNWPF UGWJYTIF BJNWSF KTYNCIFHYLIWP HPFNZV BXPWP NAB KF UGFNX
ZYIWAB NXBWPWP UGFNX BFH F UYPYQ IANFJFP FSA TFP HF TY PYJY UYPYQ NHAPZY
UYHPFNWP IF CATIV ZFGPV FSA SAI GFK HYLGF BASX LFIZ F NXHQWFP JSVUFZYN

Jedná sa o slovensky písaný text bez diakritických a interpunkčných znamienok. Text je zašifrovaný jednoduchou zámenou so zachovanými prirodzenými medzerami.

Upozornenie: Koniec riadku je tiež medzera medzi slovami.

14 bodov

6B. Rozlúštite nasledujúci text a zistite odkiaľ pochádza:

IRONKQNCV QPEWTNWVQYE NFOECRN QYRWNMENCFWUMUXUBEUNMV EUNCNVMTDBSNEYE
OEMTVRBSNIWQYWRBUXQJNSWROVBQNCMQTYDBSNS UIDBSN UKMYDBSNES RKECNYQLDNCMRNKBQWRNLE
RNMIRBSR RN QONXQKQONF EBVONRNYQLDNMEJNCVKQ NFNJDM VNORNKWUSDNIECQKR
NLDNMEJNCRJNCMTWVSRXTQNXUNIETWQMBVTQNXUNRNEMTRTEYNFVCETRNOQBSNI RBQNRNJEK
VNMRNCNOQXRYEJNY RMEWQNYQLDNLE RNMIRBSR RNKUSDNF EBVONIECQKR NLDNMEJNCRJNIRONKQNCV
QPEWTNTUNXQXQKNYTEWQJRNFORJQSENIWETVXQKUNWDBS DNRYENJDM VQOYRNIWUKYDNRYENL
QMYNMJWTVRBNRYENUKQNSWEJUNKRXTQNXQXNTQONXQKNIEWUBTQNXQXNKUMUNLESUNRNFRBSWROTQNTRYNMCXUNBQMTNRNMCXNFVCEIN
QLENJUNBSDMTRNUY RKNRNCVKVJNXUNRYENMRNL VFNYNCRMJUN EYUNMNIEYWDYBYDNUMJQCEJNRNM RYDQJVM
ECRJVNLRNCRJNIRONKQNCV QPEWTNRYNMRNOQIEIORS RTQNRNRYNOQUKWVQTQNIWCNTENLDNMEJNCRJNIECQKR NYQLDNLE
RNFRLV RN QONKQCNEMELNDR QNEORNCVKQ RNTWVNRHEOVQNEORNS RKQ RNORNTWEBSNUJVQWRXUBVBSNY RBR RNIWNTWEBSNJWTC
RBSNTWRCVBYRNIRTWVKNENWUYNRYRTRNSECEWWTQENMCXQXNBTVNUWELTQNBENCRJNSECEWVJNRNBRYRNORNCRMNOQJWTC OEMT

Jedná sa o slovensky písaný text bez diakritických a interpunkčných znamienok. Text je zašifrovaný jednoduchou zámenou so zachovanými prirodzenými medzerami avšak aj medzera je šifrovaná. Abecedy otvoreného aj šifrovaného textu pozostávajú teda zo znakov A, B, C, ..., Z a z medzery □.

Upozornenie: Koniec riadku je tiež medzera medzi slovami.