6 bodov ♣

1A. Dané sú dva otvorené intervaly $\mathbb{A} = (x^2 - 2, x^2)$ a $\mathbb{B} = (3x - 4, 3x)$. Nájdite najväčšie reálne číslo x, pre ktoré platí $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$.

Riešenie: $\mathbb{A}$ je podmnožina $\mathbb{B}$, čo znamená, že ľavá strana intervalu $\mathbb{A}$ musí byť väčšia než ľavá strana intervalu $\mathbb{B}$, podobne pravá strana intervalu $\mathbb{A}$ musí byť väčšia než pravá strana intervalu $\mathbb{B}$. Na základe toho si vytvoríme sústavu dvoch nerovníc:

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &\geq 3x - 4 \\ x^2 &\leq 3x \end{aligned}$$

Po úprave dostaneme nasledovný tvar nerovníc:

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2) &\geq 0 \\ x(x-3) &\leq 0 \end{aligned}$$

Riešením prvej nerovnice sú intervaly $I = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ a riešením druhej nerovnic je interval $J = [0, 3]$. Riešením uvedenej sústavy nerovníc bude prienik intervalov $I \cap J$, t. j.:

$$x \in [0, 1] \cup [2, 3]$$

Najväčšie reálne číslo z prieniku $I \cap J$ je $x = 3$. Skúška správnosti potvrdzuje, že $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$:

$$\mathbb{A} = [7, 9] \quad \text{a} \quad \mathbb{B} = [5, 9].$$

6 bodov ♣

1B. Rádium je rádioaktívny prvok, ktorý sa neustále rozpadáva tak, že zo začiatočného množstva N_0 kilogramov sa za t rokov jeho množstvo zmenší na $N = N_0 - e^{\lambda t}$ kilogramov, kde $e = 2,71828\ldots$ je základ prirodzených logaritmov a λ, je konštanta rozpadu rádia. Vypočítajte λ, ak viete, že poločas rozpadu rádia (zmenšenie pôvodného množstva na polovicu) je $t = 1\,600$ rokov.

Riešenie: Podľa zadania úlohy platí $N = N_0 - e^{\lambda t}$. Poločas rozpadu N_0 kilogramov rádia je 1600 rokov, čo znamená:

$$\frac{N_0}{2} = e^{1600\lambda}$$

Zlogaritmovaním oboch strán uvedenej rovnice dostaneme:

$$\ln\left(\frac{N_0 1}{2}\right) = \ln\left(e^{\lambda 1600}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(N_0) - \ln(2) = 1600\lambda$$

Z poslednej rovnice vyjadríme hodnotu λ:

$$\lambda = \frac{\ln(N_0) - \ln(2)}{1600}\,.$$

---

7 bodov ◊

2A. Daný je kváder s hranami dĺžok a, b, c. Ak zmenšíme hranu a o $2\,\mathrm{cm}$ (pri zachovaní zvyšných hrán b, c), zmenší sa jeho povrch o $40\,\mathrm{cm}^2$. Ak zväčšíme hranu b o $2\,\mathrm{cm}$ (pri zachovaní hrán a, c), zväčší sa jeho povrch o $64\,\mathrm{cm}^2$. Ak zmenšíme hranu c o $1\,\mathrm{cm}$ (pri zachovaní hrán a, b), zmenší sa jeho povrch o $28\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítajte dĺžky hrán kvádra.

Riešenie: Vzorec pre plochu kvádra s hranami dĺžok a, b a c je $S = 2ab + 2bc + 2ac$. Na základe podmienok zo zadania úlohy potom dostaneme sústavu troch rovníc:

$$\begin{aligned}
S - 40 &= 2(a-2)b + 2bc + 2(a-2)c \\
S + 64 &= 2a(b+2) + 2(b+2)c + 2ac \\
S - 28 &= 2ab + 2b(c-1) + 2a(c-1)
\end{aligned}$$

Ich úpravou dostaneme:

$$\begin{aligned}
S - 40 &= 2ab + 2bc + 2ac - 4b - 4c && (1)\\
S + 64 &= 2ab + 2bc + 2ac + 4a + 4c && (2)\\
S - 28 &= 2ab + 2bc + 2ac - 2a - 2b && (3)
\end{aligned}$$

Musíme sa zbaviť neznámej S, čo dosiahneme tým, že odčítame rovnicu (2) od rovnice (1) a rovnicu (3) odčítame od rovnice (1):

$$\begin{aligned} -104 &= -4a - 4b - 8c \\ -12 &= 2a - 2b - 4c \end{aligned}$$

Po úprave dostaneme:

$$\begin{aligned} a + b + 2c &= 26 \qquad (4) \\ a - b - 2c &= -6 \qquad (5) \end{aligned}$$

Po sčítaní a zjednodušení rovníc (4) a (5) dostaneme $a = 10$. Substitúciou $a = 10$ do (napríklad) rovnice (4) dostaneme $b = 16 - 2c$. Keď následne substituujeme $a = 10$ a $b = 16 - c$ do rovnice (1) a vzorca pre plochu kvádra, tak po úprave dostaneme:

$$\begin{aligned} S &= 296 + 16c - 4c^2 \qquad (6) \\ S &= 320 + 12c - 4c^2 \qquad (7) \end{aligned}$$

Rovnice (6) a (7) majú rovnaké ľavé strany, a preto aj ich pravé strany sa rovnajú:

$$296 + 16c - 4c^2 = 320 + 12c - 4c^2$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice je $c = 6$. Daný kváder bude mať dĺžky hrán $a = 10$, $b = 4$ a $c = 6$.

---

7 bodov

2B. Určte všetky štvorciferné prirodzené čísla deliteľné 4, pre ktoré platí: *ak v čísle vymeníme prvé dve cifry, dostaneme číslo deliteľné 7. Ak v čísle vymeníme prostredné dve cifry, dostaneme číslo deliteľné 5. Ak v čísle vymeníme posledné dve cifry, dostaneme číslo deliteľné 9.*

Riešenie: Hľadáme štvorciferné číslo $ABCD$, t. j. $1000 * A + 100 * B + 10 * C + D$.

- Číslo je deliteľné päťkou, ak jeho posledná cifra je 0, alebo 5.
- Číslo je deliteľné štvorkou, ak jeho posledné dvojčíslie je deliteľné štvorkou.

Z uvedeného je zrejmé, že posledné dvojčíslie hľadaného čísla musí byť 00, 20, 40, 60, alebo 80. Takže hľadané číslo musí byť $AB00, AB20, AB40, AB60$, alebo $AB80$.

- Číslo je deliteľné deviatkou, ak jeho ciferný súčet je deliteľný deviatkou.

Z uvedeného je zrejmé, že $A + B = 9k$, $A + B = 9k - 2$, $A + B = 9k - 4$, $A + B = 9k - 6$, alebo $A + B = 9k - 8$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

- Jedno z možných pravidiel deliteľnosti sedmičkou hovorí, že ak 5-násobok poslednej cifry sčítame s číslom tvoreným ciframi pôvodného čísla bez poslednej cifry a výsledok je deliteľný sedmičkou práve vtedy, keď pôvodné číslo je deliteľné sedmičkou.

Hľadané číslo má tvar $ABC0$. Podľa zadania úlohy má byť číslo $BAC0 = 10 * BAC$ deliteľné sedmičkou. Podľa uvedeného pravidla to znamená, že $BA + 5C$ musí byť deliteľné sedmičkou. Vzhľadom na to, že $C \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ stačí nám skúmať tieto prípady. Spolu ich je 50. Pre $C = 0$ máme len jedno riešenie. Je ním číslo 3600. Pre $C = 2$ existujú dve riešenia. Sú nimi čísla 5220 a 8820. Pre $C = 4$ neexistuje žiadne riešenie. Pre $C = 6$ máme opäť dve riešenia 2160 a 5760. Napokon pre $C = 8$ existuje jedno riešenie 7380. Spolu teda existuje 6 čísel vyhovujúcich podmienkam úlohy.

---

10 bodov

3A. Bolo raz jedno kráľovstvo, kde žili viac-hlaví draci. Počet hláv každého draka bol buď deliteľný tromi, alebo to bolo prvočíslo. Pokiaľ niekto odsekol drakovi hlavu a počet jeho hláv sa znížil tak, že už to nebolo ani prvočíslo, ani číslo deliteľné tromi, hlava mu okamžite dorástla. V kráľovstve žili draci so všetkými možnými počtami hláv, menšími než sto. Žiaden drak nemal viac než sto hláv a všetci draci mali len celočíselné počty hláv.
Raz ku kráľovi prišiel odvážny Janko a vyhlásil, že všetkých drakov zabije, pretože dokáže jednou ranou useknúť drakovi až dve hlavy súčasne. Za odmenu by chcel polovicu kráľovstva a princeznú za ženu. Kráľ sa išiel poradiť so svojími radcami, ktorí vyhlásili, že zabiť všetkých drakov nie je možné. Kráľ povedal Jankovi, že ak nezabije všetkých drakov žiadnu odmenu nedostane. Janko teda išiel a postupne zabíjal drakov. Pokiaľ odsekol drakovi dve hlavy naraz, vždy mu narástli buď dve hlavy, alebo mu nenarástla žiadna hlava. Janko si mohol vybrať, či odsekne drakovi jednu hlavu, alebo dve hlavy.
Jankovi sa nakoniec nepodarilo zabiť všetkých drakov a odmenu nezískal.
Zistite koľkohlaví draci v kráľovstve zostali.

Riešenie: Uvažujme draka, ktorému Janko už nie je schopný znížiť počet hláv, a označme počet jeho hláv ako x. Ak by x nebolo deliteľné tromi, tak by bol Janko schopný znížiť počet hláv na najbližšie číslo deliteľné tromi. To je totiž vždy o jedna alebo o dve menšie než x. Takže x je deliteľné tromi.

Ďalej, jedno z čísel $x - 1$ a $x - 2$ je vždy párne a zároveň to nesmie byť dvojka. Druhé z čísel je nepárne, nie je deliteľné tromi a nesmie to byť prvočíslo. Nemôže to byť ani jednotka. V tomto prípade je určite deliteľné jedným z prvočísel 5 alebo 7, pretože ak by nebolo deliteľné ani 5, ani 7, muselo by byť väčšie alebo rovné $11^2 = 121$, a toľko hláv žiadny z drakov nemá.

Tu už je len niekoľko možností, ktoré tieto podmienky spĺňajú. Môžeme ich nájsť napríklad tak, že čísla 5 a 7 postupne násobíme číslami, ktoré nie sú deliteľné dvoma ani tromi, kým výsledok bude menší než 100. Spĺňajú to nasledujúce čísla:

$$5 \cdot 5 = 25, \quad 5 \cdot 7 = 35, \quad 5 \cdot 11 = 55, \quad 5 \cdot 13 = 65, \quad 5 \cdot 17 = 85, \quad 5 \cdot 19 = 95,$$

$$7 \cdot 5 = 35, \quad 7 \cdot 7 = 49, \quad 7 \cdot 11 = 77, \quad 7 \cdot 13 = 91.$$

Číslo x teda môže byť iba najbližšie väčšie číslo deliteľné tromi k jednému z týchto deviatich čísel. Draci, ktorí v kráľovstve zostali, majú teda jeden z nasledujúcich počtov hláv:

$$27, \quad 36, \quad 51, \quad 57, \quad 66, \quad 78, \quad 87, \quad 93, \quad 96.$$

---

10 bodov

3B. Kliatba veže nekonečného Mesiaca.
V dávnych časoch existovala tajomná veža, ktorá sa objavovala iba počas nocí úplnku mesiaca. Hovorilo sa, že v nej prebýva čarodejnica, ktorá na jej schody uvalila mocnú kliatbu. Každý, kto sa pokúsil vystúpiť na vrchol, bol odsúdený na večné blúdenie, pokiaľ nesplnil prísne magické pravidlá.
Veža mala najviac 200 poschodí, pričom každé poschodie malo svoje magické číslo, ktoré určovalo, či sa dá dostať na vyššie poschodie. Kliatba fungovala nasledovne:

- Ak niekto stál na poschodí, ktorého číslo bolo prvočíslo, alebo číslo deliteľné siedmimi, mohol pokračovať ďalej.
- Ak sa niekto dostal na poschodie, ktorého číslo nebolo prvočíslo ani číslo deliteľné siedmimi, magická sila ho vrátila späť na predchádzajúce poschodie.

Každý návštevník mal moc poskočiť o jedno alebo dve poschodia nahor, ale nesmel sa vrátiť nižšie, než odkiaľ začal. Do veže sa odvážil mladý mág Elias, ktorý túžil po tajomstve ukrytom na jej vrchole. Bojoval so zakliatými schodmi, snažil sa vybrať tú správnu cestu, ale ani po dlhých pokusoch sa mu nepodarilo prekonať kliatbu a dosiahnuť vrchol.

Riešenie: Magická veža, do ktorej vstúpil mladý Elias, mala najviac 200 poschodí, pričom každé poschodie bolo podrobené kliatbe, ktorá určovala, či je možné postúpiť vyššie. Pravidlá boli jednoduché:

- ak bolo číslo poschodia prvočíslom alebo bolo deliteľné siedmimi, Elias na ňom mohol zostať alebo pokračovať ďalej,
- ak číslo poschodia nebolo prvočíslom, bol Elias vrátený späť na predchádzajúce poschodie.
- Elias mohol poskočiť iba o jedno alebo o dve poschodia.

Štartovacie poschodie je 1. poschodie, naň sa podmienky nevzťahujú (1 nie je prvočíslo). Pre analýzu možností Eliasovho postupu je potrebné preskúmať, ktoré poschodia sú „magické“ (umožňujú pokračovanie) a ktoré nie. Zobrazíme si to v nasledujúcej tabuľke.

Poschodie	Prvočíslo	Deliteľné 7	Magické
1	×	×	✓
2	✓	×	✓
3	✓	×	✓
4	×	×	×
5	✓	×	✓
6	×	×	×
7	✓	✓	✓
8	×	×	×
9	×	×	×
10	×	×	×
11	✓	×	✓

Z tabuľky je zrejmé, že po poschodí 7 nastáva sekvencia troch po sebe idúcich nemagických poschodí (8, 9, 10), ktorú Elias nemohol prekonať. Keďže z jedného poschodia sa mohol posunúť iba o jedno alebo dve poschodia vyššie, neexistovala možnosť, ako by mohol pokračovať za túto pascu.

Maximálne dosiahnuteľné poschodie je teda 7. poschodie. Na základe toho vyplýva, že Elias mohol úspešne dosiahnuť vrchol veže iba v prípade, ak výška veže nepresahovala sedem poschodí. Nakoľko veža mala výšku najviac 200 poschodí, je potrebné zistiť, pre aké výšky veže riešenie vôbec existuje. Zistenia je možné prehľadne zhrnúť do nasledujúcej tabuľky:

Výška veže	Existuje riešenie?	Poznámka
2	Áno	$1 \to 2$
3	Áno	$1 \to 2 \to 3$
5	Áno	$1 \to 2 \to 3 \to 5$
7	Áno	$1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 7$
> 7	Nie	Kritický úsek 8–10 je neprekonateľný

Z tabuľky je zrejmé, že cesta na vrchol existuje iba pre veže s výškou 2, 3, 5 alebo 7 poschodí. Cesta na vrchol pre veže vyššie než 7 poschodí je ilúziou – nie pre kliatbu, ale dôsledkom elementárnej aritmetiky.

PS: V zadaní chýba úloha. Je to len príbeh mladého mága Eliasa, ale nie je v ňom žiadna otázka. Snáď si šikovní riešitelia domysleli, čo majú zistiť. ☺

8 bodov

♡

4A. Cukráreň ponúka 15 druhov zákuskov. Simona si chce nechať zabaliť x zákuskov a z každého druhu kúpi najviac jeden. Vieme, že ak by chcela kúpiť o 2 zákusky viac, počet všetkých možností, ako vybrať zákusky, by sa 13-krát zvýšil. Koľko zákuskov si Simona chce nechať zabaliť?

Riešenie: Počet možností, ako popísaným spôsobom vybrať x zákuskov z 15 druhov, vypočítame ako $\binom{15}{x}$, čo sú kombinácie x-tej triedy z 15 prvkov. Na základe zadania úlohy potom vieme zostaviť rovnicu:

$$13 \cdot \binom{15}{x} = \binom{15}{x+2}$$

Túto rovnicu ďalej upravíme:

$$\begin{aligned}
13 \cdot \frac{15!}{x! \cdot (15-x)!} &= \frac{15!}{(x+2)! \cdot (15-(x+2))!} \\
13 \cdot \frac{(x+2)!}{x!} &= \frac{(15-x)!}{(13-x)!} \\
13 \cdot (x+2) \cdot (x+1) &= (15-x)(14-x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13x^2 + 39x + 26 &= 210 - 29x + x^2 \\
112x^2 + 68x - 184 &= 0
\end{aligned}$$

Poslednú rovnicu vyriešime pomocou známeho vzorca na riešenie kvadratických rovníc a dostaneme riešenia:

$$x_1 = 2 \qquad \text{a} \qquad x_2 = \frac{-23}{3}$$

Záporný koreň nemôže byť riešením danej úlohy. Simona si preto chce kúpiť 2 zákusky.

8 bodov ♡

4B. Medzinárodná vesmírna agentúra plánuje vyslať posádku na Mars. Majú 30 kandidátov, z ktorých sa vyberie x astronautov do misie. Zistilo sa, že ak by sa do misie vyberalo o 4 astronautov viac, počet možných zostáv by sa nezmenil.
Koľko astronautov malo byť pôvodne v posádke?

Riešenie: Označme si pôvodný počet astronautov ako x. Týchto x astronautov vyberáme spomedzi 30 kandidátov, pričom nezáleží na ich poradí. Počet možností výberu vieme vyjadriť pomocou kombinácií ako $\binom{30}{x}$ resp. $\binom{30}{x+4}$. Podľa zadania sa tieto dve hodnoty majú rovnať. Rovnosť kombinačných čísel vyjadríme v explicitnom tvare $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\frac{30!}{x!(30-x)!} = \frac{30!}{(x+4)!(26-x)!}$$

Ďalej rozpíšeme faktoriály $(x+4)!$ a $(30-x)!$

$$\frac{30!}{x!(30-x)(29-x)(28-x)(27-x)(26-x)!} = \frac{30!}{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)x!(26-x)!}$$

Po zjednodušení dostaneme nasledovnú rovnicu

$$(30-x)(29-x)(28-x)(27-x) = (x+4)(x+3)(x+2)(x+1)\,,$$

a po jej roznásobení a úprave dostaneme kubickú rovnicu

$$x^3 - 39x^2 + 746x - 5304 = 0$$

Pomocou (napríklad) Hornerovej schémy nájdeme jej jediný reálny koreň. Je ním $x = 13$. Skúška správnosti potvrdzuje, že $\binom{30}{13} = \binom{30}{17}$.

Alternatívne riešenie: z vlastností kombinačných čísel vieme, že platí:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Táto rovnosť nám hovorí, že pre hodnoty k a $n-k$, ktoré sú rovnako vzdialené od stredu medzi 0 a n, je počet príslušných kombinácií z n prvkov rovnaký. V našom prípade je $n = 30$, takže stred medzi 0 a 30 je 15. Hľadáme teda hodnoty x a $x+4$, ktoré sú rovnako vzdialené od 15. To znamená, že vzdialenosť oboch tých hodnôt od 15 musí byť 2. Tieto hodnoty sú preto $x = 13$ a $x+4 = 17$. Čiže $x = 13$.

9 bodov

5A. Napíšte program, ktorý vyrieši nasledovné Sudoku doplnením prázdnych políčok. Každá číslica **od 1 do 4** sa musí vyskytovať práve raz v každom riadku a v každom stĺpci tabuľky. Rovnako sa každá číslica **od 1 do 4** musí práve raz vyskytnúť v každom 2×2 podštvorci danej tabuľky.

1			4
	4		
		3	
2			1

Vstup aj výstup programu budú v textovom tvare. Danej tabuľke bude zodpovedať vstup:
`[["1",".",".","4"],[".","4",".","."],[".",".","2","."],["3",".",".","1"]]`
Bodky, t. j. znak `"."`, označujú prázdne políčka. Je zaručené že uvedená tabuľka má práve jedno riešenie. Súčasťou Vášho riešenia musí byť aj podrobné vysvetlenie použitých algoritmov a podrobný popis kódu (formou komentárov v kóde). Programovať môžete v ľubovoľnom progremovacom jazyku.

Riešenie: Riešenie je napísané v jazyku Python a slúži len na orientačné účely. Program ste mohli písať v akomkoľvek jazyku a v IDE podľa Vášho výberu. Rovnako mohla byť aj štruktúra programu iná. Dôležité je predovšetkým Vaše vysvetlenie a pochopenie logiky.

Sudoku 4×4 – kompletné riešenie v Pythone.

Riešenie využíva rekurziu, čo je programovacia technika, pri ktorej funkcia volá sama seba, aby vyriešila menšiu časť problému. Jednoducho povedané, funkcia sa volá vo svojom vlastnom tele. Riešenie využíva backtracking (formu rekurzie). Program prechádza prázdne políčka a skúša do nich doplniť čísla 1–4 tak, aby sa žiadne číslo neopakovalo v riadku, stĺpci ani v 2×2 podštvorci. Ak narazí na slepú uličku, vráti sa späť a skúsi ďalšie možnosti. Ak je celá tabuľka vyplnená, riešenie je hotové. Príklad kódu v Pythone je na nasledujúcej strane a príklad vstupu a príkaz na lúštenie Sudoku sú:

```
# Príklad vstupu podľa zadania
board = [
  ["1", ".", ".", "4"],
  [".", "4", ".", "."],
  [".", ".", "3", "."],
  ["2", ".", ".", "1"]
]

solve_sudoku(board)

print(board)
```

```
# Funkcia na nájdenie prázdneho políčka (označeného '.')
def find_empty(board):
  for i in range(4):
    for j in range(4):
      if board[i][j] == '.':
        return i, j
  return None

# Funkcia na overenie, či môžeme vložiť číslo na danú pozíciu
def is_valid(board, row, col, num):
  num = str(num)

  # Kontrola, či sa číslo nenachádza v riadku alebo stĺpci
  for i in range(4):
    if board[row][i] == num or board[i][col] == num:
      return False

  # Kontrola 2x2 podštvorca
  box_row = (row // 2) * 2
  box_col = (col // 2) * 2
  for i in range(box_row, box_row + 2):
    for j in range(box_col, box_col + 2):
      if board[i][j] == num:
        return False
  return True

# Hlavná funkcia na riešenie sudoku pomocou backtrackingu
def solve_sudoku(board):
  empty = find_empty(board)
  if not empty:
    return True # Všetko je vyplnené
  row, col = empty
  for num in range(1, 5):
    if is_valid(board, row, col, num):
      board[row][col] = str(num)
      if solve_sudoku(board):
        return True
    board[row][col] = '.' # spätný krok
  return False
```

9 bodov

♡

5B. Napíšte program, ktorý vyrieši nasledovné Sudoku doplnením prázdnych políčok. Každá číslica **od 1 do 9** sa musí vyskytovať práve raz v každom riadku a v každom stĺpci tabuľky. Rovnako sa každá číslica **od 1 do 9** musí práve raz vyskytnúť v každom 3×3 podštvorci danej tabuľky.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Vstup aj výstup programu budú v textovom tvare. Formát bude analogický ako v príklade 5A. Danej tabuľke bude zodpovedať vstup začínajúci nasledovne: `[["5","3",".","6",".",".",".","9","8"],[".","7",".","1","9","5",".",".","."],...` Bodky, t. j. znak `"."`, označujú prázdne políčka. Je zaručené že uvedená tabuľka má práve jedno riešenie. Súčasťou Vášho riešenia musí byť aj podrobné vysvetlenie použitých algoritmov a podrobný popis kódu (formou komentárov v kóde). Programovať môžete v ľubovoľnom progremovacom jazyku.

Riešenie: Riešenie je napísané v jazyku Python a slúži len na orientačné účely. Program ste mohli písať v akomkoľvek jazyku a v IDE podľa Vášho výberu. Rovnako mohla byť aj štruktúra programu iná. Dôležité je predovšetkým Vaše vysvetlenie a pochopenie logiky.

Sudoku 9×9 – kompletné riešenie v Pythone.

Aj pre 9×9 sudoku používame backtracking. Pre každé prázdne políčko skúšame čísla 1–9 a kontrolujeme, či sa číslo nenachádza v príslušnom riadku, stĺpci ani v 3×3 podštvorci. Ak je všetko vyplnené správne, máme výsledok. Príklad kódu v Pythone je na nasledujúcej strane.

```
# Funkcia na nájdenie prázdneho políčka (označeného ’.’)
def find_empty(board):
  for i in range(9):
    for j in range(9):
      if board[i][j] == ’.’:
        return i, j
  return None

# Funkcia na overenie, či môžeme vložiť číslo na danú pozíciu
def is_valid(board, row, col, num):
  num = str(num)

  # Kontrola riadku a stĺpca
  for i in range(9):
    if board[row][i] == num or board[i][col] == num:
     return False

  # Kontrola 3x3 podštvorca
  box_row = (row // 3) * 3
  box_col = (col // 3) * 3
  for i in range(box_row, box_row + 3):
    for j in range(box_col, box_col + 3):
      if board[i][j] == num:
        return False
  return True

  # Hlavná funkcia na riešenie sudoku pomocou backtrackingu
  def solve_sudoku(board):
    empty = find_empty(board)
    if not empty:
      return True # Všetko je vyplnené
    row, col = empty
    for num in range(1, 10):
      if is_valid(board, row, col, num):
        board[row][col] = str(num)
        if solve_sudoku(board):
          return True
        board[row][col] = ’.’ # spätný krok
    return False
```

Príklad vstupu a príkaz na lúštenie Sudoku sú na nasledujúcej strane.

```
# Príklad vstupu podľa zadania
board = [
  ["5","3",".",".","7",".",".",".","."],
  ["6",".",".","1","9","5",".",".","."],
  [".","9","8",".",".",".",".","6","."],
  ["8",".",".",".","6",".",".",".","3"],
  ["4",".",".","8",".","3",".",".","1"],
  ["7",".",".",".","2",".",".",".","6"],
  [".","6",".",".",".",".","2","8","."],
  [".",".",".","4","1","9",".",".","5"],
  [".",".",".",".","8",".",".","7","9"]
]

solve_sudoku(board)

print(board)
```

10 bodov

6A. Dešifrujte nasledujúci text:

```
YJ UHECXWB UZAJWZWB BTNZYJWB U LHNJEYZ G FJRJYJ TNFZEJ LHNYJ OT
OTEYTWZ OEYXS WZADXS STETUXS MUGCTS MJNGYJE GNHR J NEBT BGWJE U
DZWBHL J ACTRT ORJMNYHL SZHADYTADZ UAHDWZ UJMYHLAZ BTADZJ GM NJUYT
OTTNWBJNMJEZ ZFJ ACEHOYZC A CGWHRJUTG BEJUTG JCT WZPJY EHYZUT AJ
STDJE SHNMZ ADTEZCSZ DG J DJS MJUJNZE FTCTS T ADTEZWCG JEHFT ADTEZC
SRJADZE DUJR FRYWJE AZ OTN QGM JCT GADJDJ LHAHYYJ SGWBJ J PJYZE C
ADTEG CNH AHNHEZ HADH NUJLJ BTADZJ YJN YZSZ AUZHDZEJ OEXYTUJ EJSOJ
OEYXS AUHDETS JFX ZS YJMYJWZE MH LH GM WJA ZAD NTSTU J MH Z MJLDRJ
FGNH NHY OTADRBJE TFRGAX MT ADTEZCTU
```

a zistite o aký text sa jedná. Originálny text je písaný po slovensky, so zachovanými medzerami, bez interpunkčných a diakritických znamienok. Celý postup riešenia musí byť riadne popísaný. Len dešifrovaný text nestačí.

Riešenie: Pomocou frekvenčnej analýzy (znakov) zistíme, že sa s vysokou pravdepodobnosťou jedná o jednoduchú zámenu. Najskôr sa zamerajme na slová zo šifrovaného textu, ktoré majú dĺžky 1 a 2. Slová dĺžky 1 môžu v slovenčine byť A, O, S, Z, V, I, K, pričom výskyt K je zriedkavý a výskyt I je extrémne zriedkavý. Slov dĺžky 2 je v slovenčine viacero. Sú to napríklad slová NA, SA, JE, VO, AK, … Všimnime si, že druhé písmeno je väčšinou samohláska. Takže skúsme teraz nahradiť písmená, ktoré sa vyskytujú v 1 a 2 písmenkových slovách a uvidíme, čo dostaneme vo zvyšku zašifrovaného textu.

Najbežnejšou spojkou v slovenčine je A. Najčastejšie vyskytujúcim sa slovom dĺžky 1 v texte je J. Nahraďme všetky J písmenom A. Pozrime sa na prvé slovo dĺžky 2 – YA. Zamyslime sa nad možnými slovami dĺžky 2, ktorými by sme začali písať zmysluplný text a zároveň končia písmenom A. Môže to byť napríklad NA. Pracujme ďalej s hypotézou, že J=A a Y=N. Dostaneme text:

```
NA UHECXWB UZAAWZWB BTNZNAWB U LHNAENZ G FARANA TNFZEA LHNNA OT
OTENTWZ OENXS WZADXS STETUXS MUGCTS MANGNAE GNHR A NEBT BGWAE U
DZWBHL A ACTRT ORAMNNHL SZHADNTADZ UAHDWZ UAMNHLAZ BTADZA GM NAUNT
OTTNWBANMAEZ ZFA ACEHONZC A CGWHRAUTG BEAUTG ACT WZPAN EHNZUT AA
STDAE SHNMZ ADTEZCSZ DG A DAS MAUANZE FTCTS T ADTEZWCG AEHFT ADTEZC
SRAADZE DUAR FRNWAE AZ OTN QGM ACT GADADA LHAHNNA SGWBA A PANZE C
ADTEG CNH AHNHEZ HADH NUALA BTADZA NAN NZSZ AUZHDZEA OEXNTUA EASOA
OENXS AUHDETS AFX ZS NAMNAWZE MH LH GM WAA ZAD NTSTU A MH Z MALDRA
FGNH NHN OTADRBAE TFRGAX MT ADTEZCTU
```

Ďalej sa pozrime na reťazec AA v štvrtom riadku. Druhé A vzniklo dosadením za písmeno J. Veľmi pravdepodobne ide o slovo SA. Nahraďme v texte A písmenom S. Ďalej z ôsmeho riadku vyberme slovo AFX. Prvé písmeno A už je súčasťou otvoreného textu. Slovo AFX môže byť napríklad ANI, ANO, ABY. Avšak už sme predpokladali, že N je v šifrovanom texte reprezentované písmenom Y, preto nám z uvedených možností zostáva len slovo ABY. Takže nahradíme F písmenom B a X nahradíme písmenom Y. Text potom vyzerá takto:

NA UHECYWB UZAAWZWB BTNZNAWB U LHNAENZ G BARANA TNBZEA LHNNA OT
OTENTWZ OENYS WZADYS STETUYS MUGCTS MANGNAE GNHR A NEBT BGWAE U
DZWBHL A ACTRT ORAMNNHL SZHADNTADZ UAHDWZ UAMNHLAZ BTADZA GM NAUNT
OTTNWBANMAEZ ZBA ACEHONZC A CGWHRAUTG BEAUTG ACT WZPAN EHNZUT AA
STDAE SHNMZ ADTEZCSZ DG A DAS MAUANZE BTCTS T ADTEZWCG AEHBT ADTEZC
SRAADZE DUAR BRNWAE AZ OTN QGM ACT GADADA LHAHNNA SGWBA A PANZE C
ADTEG CNH AHNHEZ HADH NUALA BTADZA NAN NZSZ AUZHDZEA OEYNTUA EASOA
OENYS AUHDETS ABY ZS NAMNAWZE MH LH GM WAA ZAD NTSTU A MH Z MALDRA
BGNH NHN OTADRBAE TBRGAY MT ADTEZCTU

V prvom riadku je teraz možné vidieť slovo BARANA (pomenovanie zvieraťa). Pri takejto šifre je síce nepravdepodobné, že sa nejaké písmeno zobrazí samé na seba, ale nie je to vylúčené. V nasledujúcej tabuľke si zobrazíme, doterajšie priradenia písmen.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
S					B				A								R						Y	N	

Tabuľka 1: Priradenia písmen po druhom a treťom (BARANA) kroku

Takto budeme postupne skúšať a nahrádzať ďalšie a ďalšie písmená, až sa nakoniec dopracujeme ku kompletnej dešifrovacej tabuľke. Pozor! Keďže text obsahuje len 23 rôznych písmen, existuje 6 možných dešifrovacích abecied. V nasledujúcej tabuľke je zobrazená len jedna z nich.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
S	H	K	T	L	B	U	E	Q	A	W	J	Z	D	P	G	F	R	M	O	V	X	C	Y	N	I

Tabuľka 2: Dešifrovacia abeceda

Potom aplikovaním kompletnej dešifrovacej abecedy dostaneme otvorený text:

NA VELKYCH VISACICH HODINACH V JEDALNI U BARANA ODBILA JEDNA PO
POLNOCI PLNYM CISTYM MOLOVYM ZVUKOM ZADUNAL UDER A DLHO HUCAL V
TICHEJ A SKORO PRAZDNEJ MIESTNOSTI VSETCI VAZNEJSI HOSTIA UZ DAVNO
POODCHADZALI IBA SKLEPNIK S KUCERAVOU HLAVOU AKO CIGAN LENIVO SA
MOTAL MEDZI STOLIKMI TU A TAM ZAVADIL BOKOM O STOLICKU ALEBO STOLIK
MRASTIL TVAR BRNCAL SI POD FUZ AKO USTATA JESENNA MUCHA A GANIL K
STOLU KDE SEDELI ESTE DVAJA HOSTIA NAD NIMI SVIETILA PLYNOVA LAMPA
PLNYM SVETLOM ABY IM NAZNACIL ZE JE UZ CAS IST DOMOV A ZE I ZAJTRA
BUDE DEN POSTRHAL OBRUSY ZO STOLIKOV

Ak sa svedomito pripravujete na maturitu zo slovenského jazyka a literatúry, možno v uvedenom texte spoznávate úvodný odsek prvého dielu románu *Demokrati* od Janka Jesenského.

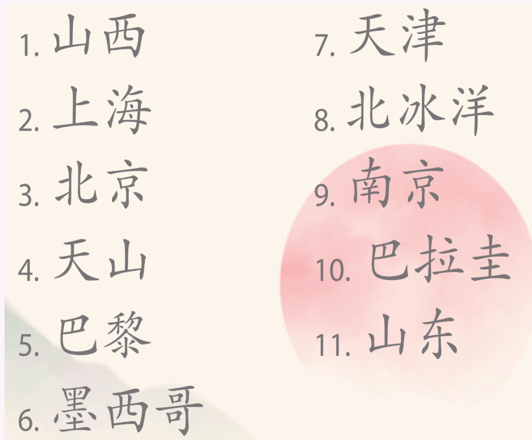
Jednoduchá substitúcia. Určite ste sa niekedy v detstve stretli s dobrodužnými románmi, v ktorých sa hlavní hrdinovia snažili zmiasť svojich neprajníkov pomocou „tajnej reči". Vopred sa dohodli, že každé jedno písmeno svojich správ nahradia iným písmenom podľa dopredu dohodnutých pravidiel. Šifre, v ktorej sa nahrádza jeden znak za jeden znak jednoznačným spôsobom, hovoríme jednoduchá substitúcia (zámena). Najznámejší variant tejto šifry je *Cézarova šifra*, ktorá vytvára šifrovaciu abecedu posunutím písmen o určitý konštantný počet miest. V našom prípade je šifrovacia abeceda vytvorená náhodne (pozri tabuľku 2).

Riešenie pomocou počítača. Jednoduchú substitúciu je možné, v prípade dostatočne dlhého zašifrovaného textu a znalosti jazyka originálneho textu, veľmi rýchlo dešifrovať aj pomocou počítača. Existuje viacero nástrojov, ktoré využívajú spôsob automatizovaného riešenia. Môžete vyskúšať napríklad online nástroj **Mono-alphabetic Substitution**, prípadne program **Secret Code Breaker**, alebo **Cryptool**.

10 bodov

6B. Na obrázku nižšie je po čínsky uvedených nasledujúcich jedenásť geografických názvov

A) Nankin	C) Šaňsi	E) Paraguaj	G) Pekin	I) Šaňdun
B) Paríž	D) Tjan-Šan	F) Tjaňcziň	H) Šanchaj	J) Mexiko
K) Severný ľadový oceán				



Niektoré názvy čínskych miest (Šaňsi, Tjaňcziň, Pekin, Šanchaj, Šaňdun) sú zapísané foneticky. Vašou úlohou je

a) spárovať geografické názvy s im zodpovedajúcim čínskym zápisom,

b) zistiť, čo znamená (aký význam / preklad má) znak 北.

Riešenie musí byť riadne popísané a zdôvodnené. Nebudú sa uznávať žiadne riešenia typu *„mám suseda číňana“*, *„použil som čínsky slovník“*, alebo *„preložil mi to počítač“*.

Riešenie: V tomto prípade sa jedná o lingvistickú šifru. Pripomeňme si na tomto mieste napr. jazyk indiánov z kmeňa Navajov, ktorý američania používali ako šifru počas II. svetovej vojny v Tichomorí. Takáto šifra sa rieši podobne ako iné substitučné šifry. Budeme vychádzať z toho, uvedené čínske slová sú zapísané „hláskovými hieroglyfmi“, t. j. rovnaké znaky zodpovedajú rovnakým hláskam. Viackrát sa opakujúce hlásky v uvedených slovách sú

- kin
- par
- šan
- šaň
- si
- veľmi podobné hlásky: tjan / tjaň a šan / šaň

Dané slová potom môžeme rozdeliť do nasledujúcich skupín

巴拉圭 – 巴黎　山西 – 山东　天山 – 天津　北京 – 北冰洋　北京 – 南京
山西 – 墨西哥

Paraguaj–Paríž , Šaňsi–Šaňdun , Šanchaj–Tjan-Šan , Tjan-Šan–Tjaňcziň , Pekin–Nankin
Šaňsi–Meksiko

Najskôr sa pokúsime priradiť názvy čínskych miest, pretože pri nich je situácia jasná – píšu sa foneticky (hláskovo). Pozorní riešitelia si iste všimli, že 天山 obsahuje znak, ktorým sa začína dvojica slov 山西–山东. Po analýze týchto slov je ľahké pochopiť, že ide o Tjan-Šan. V súlade s tým by 天津 malo byť Tjaňczjiň. 山西 a 山东 by mali zodpovedať Šaňsi a Šaňdun, ale zatiaľ nie je jasné, v akom poradí. Paraguaj a Paríž budú mať čínsku podobu 巴拉圭 a 巴黎. Na základe počtu hlások môžeme predpokladať, že prvé je Paraguaj a druhé je Paríž. Slová Pekin a Nankin majú rovnakú spoluhláskovú poslednú slabiku. Týmto slovám budú zodpovedať 北京 a 南京, ale zatiaľ nevieme v akom poradí.

Pokúsme sa o ďalšiu fonetickú analýzu slov na príklade slova Mexiko. Toto slovo si prepíšeme foneticky ako mek-si-ko. Vyskytuje sa v ňom hláska si a porovnáme ho so slovom, v ktorom sa takisto nachádza táto hláska: Šaň-si. Šaňsi a Šaňdun majú čínsku podobu 山西 a 山东, ale nemali sme určené, ktoré je ktoré. Vidíme, že jediný zhodný znak slov 山西, 山东, 墨西哥 je znak 西. Z toho je zrejmé, že Šaňsi bude 山西, Šaňdun bude 山东 a Mexiko bude 墨西哥.

Pre slová Šanchaj a Severný ľadový oceán, nám zostávajú čínske zápisy 北冰洋 a 上海. Najťažšie je určiť význam znaku 北. Vieme, že 北京, v ktorom sa tento znak tiež nachádza, zodpovedá jednému zo slov Pekin a Nankin. Pozrime sa na ich geografickú polohu, ktorá nám môže niečo napovedať. Nankin je mesto na východe Číny, Pekin sa nachádza na severe. Vidíme, že tieto mestá sa nachádzajú v rôznych geografických častiach Číny. Predpokladajme preto, že znak 北 znamená sever. Tomu, že sa jedná o označenie geografického severu, nasvedčuje aj zostávajúce označenie Severný ľadový oceán. Takže Nankin bude 南京, Pekin (severné mesto) bude mať čínsku podobu 北京 a čínske znaky 北冰洋 budú zonačovať Severný ľadový oceán. Potom 上海 bude znamenať Šanchaj. V nasledujúcej tabuľke máme všetky naše zistenia zosumarizované.

1.	山西	Šaňsi
2.	上海	Šanchaj
3.	北京	Pekin
4.	天山	Tjan-Šan
5.	巴黎	Paríž
6.	墨西哥	Mexiko
7.	天津	Tjaňczjiň
8.	北冰洋	Severný ľadový oceán
9.	南京	Nankin
10.	巴拉圭	Paraguaj
11.	山东	Šaňdun
	北	sever / severný